MATEMATICA. - Non è facile esprimere in una unica definizione ciò che si intende oggi col nome di m. : la definizione classica di « scienza della quantità » o la classificazione nel canone medievale delle scienze come « scienza del secondo grado di astrazione » rendono soltanto un aspetto dell'insieme di concetti e di metodi che va sotto il nome di m. e che da alcuni si vorrebbe far rientrare interamente nella logica, secondo la definizione ormai classica di Russell : « La m. è l'insieme delle proposizioni del tipo p implica q ».

I. PREMESSA. – Si può dire che il processo di maturazione che ha condotto la m. all'assetto attuale ha avuto inizio sostanzialmente nel sec. XIX; prima di quest'epoca si possono distinguere : un periodo che si potrebbe chiamare della m. antica e medievale ed un periodo di evoluzione che è caratterizzato da tre avvenimenti basilari : 1) l'adozione dell'uso delle cifre arabe per la scrittura dei numeri e la nascita dell'algebra; 2) l'invenzione della geometria analitica; 3) l'invenzione del calcolo infinitesimale.

II. LA MATEMATICA ANTICA. – È noto che presso quasi tutti i popoli antichi, specialmente orientali, si trovano tracce di una certa conoscenza della m. Tuttavia, prima dell'inizio della civiltà greca, non si hanno prove che tale conoscenza fosse coltivata per se stessa, al di là delle immediate applicazioni che poteva avere alla vita comune, p. es. ai computi di carattere finanziario, all'agrimensura, all'astronomia ed all'astrologia. Le conoscenze matematiche si trovano inoltre spesso frammiste a idee di carattere filosofico e magico.

Solo con la civiltà greca compare la m. intesa come scienza, cioè come insieme di proposizioni non sperimentali che vengono rigorosamente dimostrate in base a certe premesse. Nel trattato degli *Elementi* di Euclide (che si fa risalire al 300 a. C.) confluiscono certamente le scoperte dei secoli precedenti e le conoscenze dei contemporanei; il suo rigore logico e la eleganza della trattazione lo faranno rimanere come canone nei secoli successivi e ancora oggi destano la nostra ammirazione.

Presso la m. antica (e presso la medievale che ne segue le orme) si trova una caratteristica dicotomia: in essa, che viene definita come scienza della quantità o dello « ens quantum », vengono distinte due branche principali: l'aritmetica, scienza della « quantità discreta » o del numero; la geometria, scienza della « quantità continua », identificata con l'estensione. Quest'ultima ebbe uno sviluppo floridissimo mentre non altrettanto si può dire dell'aritmetica.

Tra le cause che si possono dare di questo fatto non ultima è la mancanza di un adeguato sistema di notazioni per rappresentare i numeri e le operazioni. In un certo senso si potrebbe dire che la geometria classica raggiunse il più alto livello compatibile con lo sviluppo del resto della m., invadendo anzi dei campi che vengono oggi giustamente attribuiti ad altre discipline: p. es., esiste presso i Greci una teoria geometrica delle equazioni di secondo grado e una teoria (pure geometrica) dei numeri reali nella forma equivalente di una completa teoria delle proporzioni tra grandezze; invece alcuni dei problemi lasciati insoluti dalla geometria classica furono risolti soltanto dall'algebra e dall'analisi del sec. XIX. Manca invece sostanzialmente presso i classici la meccanica razionale, cioè lo studio quantitativo delle forze e del moto, se si escludono le geniali ricerche di Archimede sull'equilibrio.

III. La matematica del Rinascimento e l'algebra. – La m. classica proseguì nella scia dei grandi, tra i quali ricordiamo Euclide (fiorito verso il 300 a. C.), Archimede (287-212), Apollonio (II sec. a. C.), Diofanto (II-III sec. d. C.), e non uscì dal vecchio solco, finché non venne trapiantata, attraverso la m. araba che ne era stata l'erede, nell'Italia del Rinascimento. Avvenne allora la prima grande svolta nello sviluppo della m.: per le necessità dei calcoli finanziari si rivelò di grandissimo aiuto il sistema di scrittura dei numeri che è adottato ancora oggi.

Sono noti i principî sui quali si fonda tale scrittura: si hanno nove cifre per rappresentare i primi nove numeri, ed inoltre nella scrittura di un numero maggiore di 9 si conviene di attribuire ad un cifra il suo valore, oppure dieci, cento, mille volte il suo valore a seconda che la cifra stessa sia nel primo, nel secondo, nel terzo posto a cominciare da destra e così via. Questa notazione è puramente convenzionale: la scelta della base 10 ha ragioni solo tradizionali; fu proposto il 12 e potrebbe servire anche il 2; anzi, quest'ultima convenzione (od espedienti meccanici ed elettrici ad essa equivalenti) è stata adottata per le modernissime calcolatrici elettroniche.

L'adozione di tali convenzioni di scrittura da parte dei matematici (soprattutto italiani) del Rinascimento diede l'avvio ad un vastissimo movimento che portò, attraverso ad una lenta secolare maturazione, allo stabilizzarsi delle indicazioni per le operazioni e delle convenzioni di calcolo. D'altra parte la risoluzione delle equazioni di III e IV grado per opera di algebristi italiani (rispettivamente Cardano [1501-1576] e Ludovico Ferrari [1522-1565]) diede inizio all'estensione del campo numerico, che portò attraverso i secoli all'introduzione dei numeri irrazionali, relativi, complessi. Iniziò così un movimento che doveva maturare nello studio delle proprietà puramente formali delle operazioni, sfociando nella moderna algebra.

IV. La geometria analitica. – Un'altra svolta fondamentale nello sviluppo della m. si ha con l'invenzione della geometria analitica. Senza entrare qui nel merito delle questioni di priorità per l'attribuzione della invenzione della geometria analitica al Descartes o al Fermat, ricorderemo la data di pubblicazione della *Géometrie* del Descartes: 1637. Si usa qui la parola « invenzione » (come la si userà nel seguito a proposito del calcolo infinitesimale) per indicare un processo psicologico che partecipa (in quali proporzioni è difficile precisare di volta in volta) tanto della scoperta che della libera creazione, analoga a quella artistica, processo analogo (se pure su un piano intellettuale più alto) a quello dell'inventore che parte da certe realtà materiali o da certe leggi fisiche ed escogita nuovi mezzi per utilizzarle.

La geometria analitica nacque anzitutto come metodo, come artificio per sfruttare le risorse dell'algebra per la risoluzione dei problemi geometrici; ed in questo senso si può dire che ha ben raggiunto il suo scopo, ottenendo di mettere a disposizione della geometria tutti i progressi fatti dall'algebra e dall'analisi matematica nei secoli successivi. Inversamente la presenza della geometria analitica servì a stabilire la necessità della creazione di un continuo numerico isomorfo a quello geometrico e pose all'analisi numerosi problemi: tra gli altri il problema del tracciamento delle tangenti e del calcolo delle aree o dei volumi, che sono tra i fondamentali del calcolo infinitesimale perché conducono alle operazioni fondamentali di « derivazione » e di « integrazione ».

V. Il calcolo infinitesimale. – Come si è già detto, non si starà qui a dirimere la questione di priorità tra Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) per l'invenzione del calcolo, né ad enumerare tutti quelli che vengono oggi riconosciuti come i precursori di esso: si ricorderà solo che già presso Archimede si trovano genialissimi procedimenti che preludono a quelli del calcolo, e così pure presso Luca Valerio (1552-1618) e B. Cavalieri (1598-1647) e Pietro Mengoli (1626-1686). Non è neppure possibile valutare qui quale fosse la vera interpretazione che gli stessi inventori ed i loro primi epigoni davano di questo calcolo degli « infinitamente piccoli » (o degli «infinitamente grandi»), se cioè questi fossero intesi in senso « attuale » oppure in senso « potenziale »; senso quest'ultimo equivalente a quella che è l'interpretazione rigorosa moderna, che si ottiene attraverso il concetto di « limite ». Né è possibile enumerare la massa (talvolta notevole) di divagazioni, ragionamenti pseudofilosofici, paralogismi, nella quale si trovano immersi i primi risultati di tale calcolo.

Certo è che nell'invenzione del calcolo deve avere giocato una parte notevole l'intuizione geometrica, perché nei procedimenti del calcolo hanno fondamentale importanza il concetto di « continuità » e l'operazione di « passaggio al limite »; concetto ed operazione che dal punto di vista geometrico appaiono del tutto chiari, ma che richiesero invece un notevole e lungo lavoro critico per essere chiariti in modo soddisfacente senza l'intervento della geometria; cosicché alcuni procedimenti furono pienamente giustificati ed alcuni teoremi rigorosamente dimostrati soltanto dopo qualche secolo dalla loro scoperta e dal loro uso. Non è possibile dare neppure un'idea approssimata dei procedimenti e dei concetti del calcolo infinitesimale; si ricordano qui soltanto due tra i concetti che maturarono nella m. nei secoli successivi alla sua invenzione e che sono fondamentali per la m. moderna: il concetto di « funzione » e quello di « limite ».

Il concetto di « funzione » è introdotto comunemente oggi come un concetto « primitivo », cioè un concetto che si rinuncia a definire mediante concetti più chiari di esso; ci si limita a dare degli esempi e dei sinonimi, come « corrispondenza ». Nel caso più semplice ed elementare si possono fare considerazioni di questo tipo: sono date due classi (o insiemi, o serie) di numeri; per intenderci, i numeri di una classe sono indicati come numeri x e quelli dell'altra come numeri y. Si dice che la variabile y (variabile « dipendente ») è funzione della x (variabile « indipendente ») se esiste una determinata corrispondenza che ad ogni valore x fa corrispondere un ben determinato valore (o più ben determinati valori) di y.

Altro concetto fondamentale acquisito alla m. in seguito all'invenzione del calcolo infinitesimale è quello di « limite ». In modo molto grossolano esso può essere illustrato così : si dice che un certo valore L è limite di una funzione $f(x)$ per x che tende ad un determinato valore c se, con l'avvicinarsi indefinito della variabile indipendente x al valore c, la funzione $f(x)$ si avvicina indefinitamente al valore L. Naturalmente il fatto, qui espresso in modo molto vago con l'espressione « avvicinarsi indefinitamente », dev'essere precisato in modo rigoroso, sul quale non ci si sofferma.

Il concetto di limite permette tra l'altro di introdurre delle operazioni che danno origine a nuove funzioni a partire da una funzione data (le « derivate »). Esso permette inoltre di eseguire con simboli adatti, e sull'ente astratto « funzione », quelle operazioni che erano richieste dal calcolo di aree o volumi o da problemi equivalenti e che avevano dato origine ad artifici da parte dei precursori; artifici che, per quanto ingegnosissimi, erano tuttavia validi caso per caso e quindi non atti a dare procedimenti di portata generale. Inoltre il concetto di limite permise di rendere chiaramente ragione della possibilità di uso di algoritmi infiniti (serie, prodotti infiniti, frazioni continue infinite, ecc.), la cui validità era sempre stata confermata soltanto « a posteriori » dalla riuscita dei calcoli. Tali algoritmi e procedimenti infiniti erano già stati oggetto di discussioni fino dall'antichità classica (paradosso di Achille e la tartaruga, ecc.) e il loro definitivo chiarimento risultò essere un grande progresso per la m. (v. INFINITESIMALE, ANALISI).

VI. LA MECCANICA RAZIONALE. – La fecondità dei nuovi metodi e procedimenti acquisiti alla m. fu provata dalla nascita e dal rigoglioso fiorire di una nuova scienza : la meccanica razionale, nata come studio delle forze e dei moti dei corpi.

Essa costituisce un elegantissimo esempio di studio dei fenomeni della natura da un punto di vista strettamente quantitativo. In essa si trovano numerosi esempi caratteristici delle astrazioni che la scienza deve fare per applicare la m. alla natura : i suoi oggetti sono delle astrazioni-limite, p. es. punti materiali, fili infinitamente sottili, perfettamente flessibili ed inestensibili, corpi perfettamente rigidi. La meccanica costituì e ancora costituisce una miniera di problemi per l'analisi matematica e quindi la sua esistenza rappresentò uno stimolo vigoroso per il progresso del calcolo. Basta pensare che ad un'operazione fondamentale per il calcolo, la « derivazione », si è condotti dal problema meccanico semplicissimo : dato il moto di un punto (cioè la legge di moto di un punto) trovare la sua velocità ad ogni istante. All'altra operazione fondamentale del calcolo, l'« integrazione », in certo senso inversa della precedente, si è condotti dall'altro problema meccanico : conosciuta in ogni istante la velocità di un punto, trovare lo spazio da lui percorso a partire da un determinato istante.

Inoltre il problema di determinare il moto di un punto quando si conoscano le forze che agiscono su di esso porta a risolvere delle « equazioni differenziali », cioè delle equazioni che legano delle funzioni e le loro derivate; problema anche questo cardinale per l'intera analisi matematica.

VII. LA MATEMATICA DEL SEC. XIX. – Il sec. XIX segna una piena maturazione della m. e l'inizio di un processo di assestamento che la porterà all'assetto attuale.

È impossibile anche solo elencare i progressi compiuti dalla m. in tale secolo. Tra i risultati più significativi si ricorda qui, anzitutto, la completa sistemazione logica della teoria dei « numeri complessi », cioè dei numeri del tipo $a + ib$, con a e b numeri reali ed i « unità immaginaria », soddisfacente alla relazione $i^2 = -1$.

Tali enti, creati dagli algebristi italiani del Rinascimento, erano sempre stati usati senza una precisa sistemazione logica ed il loro uso era sempre stato giustificato « a posteriori » dalla riuscita dei calcoli; la giustificazione logica del loro impiego viene attribuita al Gauss (1777-1855), che ne diede una interpretazione geometrica. Allo stesso sommo matematico va attribuita inoltre la prima dimostrazione rigorosa del teorema che viene chiamato « fondamentale dell'algebra » e che afferma : « Ogni equazione algebrica avente i coefficienti complessi ha almeno una radice, che appartiene pure al campo dei numeri complessi ».

Oltre alla teoria dei numeri complessi venivano pure sistemate in modo indipendente anche le teorie dei numeri relativi e dei numeri irrazionali, ottenendosi così la costruzione autonoma di un continuo numerico, che è il fondamento sul quale viene costruita l'analisi matematica in modo pure autonomo (v. NUMERO).

Tra i risultati che riguardano la teoria delle equazioni algebriche sono qui da ricordare il famoso teorema detto di Ruffini-Abel, che afferma che un'equazione algebrica generale di grado superiore al quarto non può essere risolta mediante estrazioni di radici in numero finito; e le geniali ricerche del Galois che diedero origine alla « teoria dei gruppi », la quale doveva sfociare nell'algebra astratta moderna. Si ricordano anche l'opera del Cauchy (1789-1857), che fu tra gli iniziatori dell'introduzione del rigore in analisi, col dimostrare delle proposizioni che venivano prima ritenute evidenti per « ragioni geometriche »; e l'opera dello stesso autore nella fondazione della teoria delle funzioni di variabile complessa; teoria nella quale il concetto di funzione viene esteso ed applicato al caso in cui le variabili (indipendente e dipendente) siano numeri complessi. Nello stesso secolo si hanno pure il sistemarsi come branche autonome della geometria proiettiva e della geometria differenziale, il sorgere della geometria algebrica e infine la grandiosa opera di sistemazione del Klein, il quale nel 1872 con la sua *Dissertazione inaugurale* (comunemente nota come *Programma di Erlangen*) diede una inquadratura generale della scienza geometrica (v. GEOMETRIA).

Il sec. XIX vide pure la fine delle dispute secolari attorno alla indimostrabilità del postulato di Euclide della unicità della parallela e vide quindi entrare nella m. le geometrie non euclidee (v.) come organismi scientifici perfettamente accettabili e coerenti. Quest'ultimo fatto diede inizio ad un movimento di idee e ad una revisione critica di concetti che portò alla moderna concezione della geometria, demolendo definitivamente l'idea che questa fosse lo studio di un « dato » (lo spazio, l'estensione, ecc.), di cui si tratta di studiare le proprietà, come la fisica studia le proprietà della materia (v. SPAZIO). Anche altre questioni secolari e problemi classici (quadratura del circolo con riga e compasso e simili) vennero definitivamente sistemate con l'aiuto dell'analisi e soprattutto con la nuova teoria delle funzioni di variabile complessa e le nuove ricerche di algebra. La fine del sec. XIX trovò la m. in piena fase di sviluppo e di revisione critica dei suoi princìpî per la ricostruzione *ab imis* dell'edificio logico da essa costituito.

VIII. ASSETTO ATTUALE DELLA MATEMATICA. – La descrizione dell'assetto attuale della m. è molto difficile senza l'uso di un linguaggio altamente specializzato; pertanto ciò che segue ha soltanto un carattere di grande sommarietà ed approssimazione.

1. *Aritmetica*. – È da notare, anzitutto, che delle due branche in cui si usava dividere la m. in antico,

lo studio della quantità discontinua e quello della quantità continua, quest'ultima appare oggi molto più vasta e coltivata da un maggior numero di ricercatori della prima.

Tra le varie ragioni di questo fatto si può ricordare la grande astrattezza, difficoltà ed aridità che hanno assunto i moderni studi di aritmetica e invece la (relativa) varietà e fecondità di applicazioni che hanno le teorie della m. del continuo. Invero la moderna aritmetica appare difficilmente suscettibile di applicazioni e invece feconda di problemi straordinariamente ardui; tra questi ricordiamo a titolo di esempio: la determinazione esatta della legge statistica di distribuzione dei numeri primi nella successione degli interi, il classico « teorema di Fermat », il teorema di Goldbach.

Per quanto riguarda la prima questione, ricordiamo che era ben noto alla m. classica che la successione dei numeri primi non è finita; ma soltanto la m. moderna, con la mobilitazione delle risorse più elevate dell'analisi riuscì a dare delle leggi asintotiche di distribuzione, cioè delle leggi che dessero il numero dei numeri primi contenuti in un intervallo abbastanza grande con una approssimazione relativa minore di un numero prefissato.

Per quanto riguarda il cosiddetto « teorema di Fermat » esso riguarda la relazione

$$x^n + y^n = z^n$$

con n intero ed afferma che per n maggiore di tre non vi sono terne di numeri interi x, y, z che soddisfino a tale equazione. Non vi sono dimostrazioni di questo teorema che resiste da secoli a tutti i tentativi di dimostrazione, ma se ne conoscono soltanto delle verifiche in numerosissimi casi; il Fermat stesso che lo enunciò affermò di averlo dimostrato, ma la sua pretesa dimostrazione non ci è pervenuta.

Per quanto riguarda il teorema di Goldbach, esso afferma che « ogni numero intero abbastanza grande si può esprimere mediante la somma di quattro numeri primi »; la sua dimostrazione ha richiesto gli sforzi dei matematici di più di due secoli.

Forse più di qualunque descrizione questi pochi esempi possono bastare per dare un'idea della enorme difficoltà dei problemi che riguardano la moderna teoria dei numeri intesa come teoria dei numeri interi, aritmetica.

2. *Algebra.* – Un posto del tutto a sé sta assumendo nella m. moderna l'algebra astratta, che ancora qualche decennio fa era considerata come una parte dell'analisi matematica, parte alla quale si affidavano le teorie propedeutiche ed introduttive. Essa invece va oggi sviluppandosi sempre più come teoria delle proprietà formali delle operazioni e dei numeri ; essa prosegue pertanto la strada aperta dalla teoria dei gruppi, che è nata in relazione al problema della risoluzione delle equazioni algebriche e si è poi sviluppata ed estesa per conto suo.

L'algebra moderna estende il suo studio alle proprietà degli insiemi di numeri, concepiti come creati astrattamente da certe operazioni aventi certe proprietà formali (gruppi, anelli, corpi, ecc.) e di qui giunge fino a includere, almeno in parte, la logica (formale) in quanto questa può essere codificata in simboli ideografici ed in regole sintattiche che li reggono. La sua importanza va crescendo in relazione all'astrattezza sempre maggiore che gli studi matematici vanno assumendo.

Nel campo della m. del continuo vengono tradizionalmente distinti tre rami principali : analisi matematica, geometria, meccanica razionale.

3. *Analisi matematica.* – Possiamo dire che essa si occupa dello studio delle funzioni (nel senso più generale del termine) e delle operazioni che si possono eseguire su di esse.

P. es., la teoria delle funzioni di variabile reale e la teoria delle funzioni di variabile complessa. Nascono dalla prima molte questioni che hanno vari addentellati con la logica e sulle quali ritorneremo : teoria degli insiemi, principio di Zermelo, ecc. Appartiene alla seconda lo studio di innumerevoli funzioni che hanno fondamentale importanza per tutto il resto della m., tanto in senso teorico quanto in senso pratico : tra quelle che hanno fondamentale importanza teorica ricordiamo le funzioni algebriche, cioè le funzioni definite implicitamente da una equazione algebrica; sullo studio di tali funzioni è fondata una intera branca della geometria : la geometria algebrica. Tra quelle che hanno importanza per le applicazioni ricordiamo le trascendenti elementari (esponenziale, logaritmo, le funzioni trigonometriche, le funzioni iperboliche, ecc.) e le altre trascendenti : funzioni ellittiche, funzioni di Bessel, ecc., delle quali sono state costruite tavole numeriche, in vista delle svariate applicazioni.

Appartiene al campo dell'analisi lo studio delle equazioni differenziali, cioè delle equazioni che legano una funzione con le sue derivate; si è visto che ad equazioni di questo tipo si riconduce il problema fondamentale della meccanica razionale: determinare il moto di un punto quando si conoscono le forze che agiscono su di esso.

Appartiene pure al campo dell'analisi il « calcolo delle variazioni » che ha preso origine da problemi di massimo e di minimo relativi a funzioni : p. es., il classico « problema della brachistocrona », che consiste nel determinare il percorso che un punto pesante deve percorrere tra due dati punti per impiegare il minor tempo possibile, ed il « problema della geodetica », che consiste nel determinare la curva che su una data superficie segna il percorso di minima lunghezza tra due dati punti.

Generalmente la tendenza più moderna è verso la massima astrattezza, che tende a rappresentare gli enti dell'analisi con linguaggio geometrico come enti di spazi astratti (spazi di Hilbert, spazi di Banach, ecc.) e tende ad aprire sempre più la strada ad ideografie e ad algebre logiche che assicurino la rigorosità alle deduzioni per le quali non si può più fare appello all'intuizione geometrica (v. SPAZIO).

All'analisi matematica applicata può essere ascritto il calcolo delle probabilità (v.); esso è fondamento della statistica e della m. dell'economia e delle assicurazioni.

4. *Geometria.* – Dal grande tronco della geometria del sec. XIX oggi si diramano sostanzialmente tre rami principali : la topologia, la geometria algebrica, la geometria differenziale.

Si attribuisce alla topologia lo studio del continuo come tale, nelle sue qualità che ancora oggi si riconoscono come fondamentali : la divisibilità indefinita e la contiguità tra le parti (potenziali, in numero infinito); questa branca della geometria può dunque essere definita come lo studio delle proprietà delle figure che rimangono invariate per trasformazioni biunivoche e continue. Pertanto competono alla topologia, p. es., lo studio delle proprietà di connessione delle superficie e delle varietà, lo studio delle proprietà dei nodi e delle trecce nello spazio tridimensionale, lo studio delle proprietà puramente qualitative delle trasformazioni degli spazi in sé, p. es. la dimostrazione dell'esistenza di eventuali punti uniti, cioè coincidenti con i propri corrispondenti : tali risultati sono di importanza fondamentale, anche se non ulteriormente precisati (o precisabili) perché sono punti di partenza per altre dimostrazioni di esistenza che servono ad altri rami della m. In senso sempre più vasto la topologia viene poi applicata ad enti che hanno i caratteri dello spazio soltanto per estensione o per analogia (spazi funzionali e così via) e viene così messa al servizio delle più moderne ricerche dell'analisi matematica.

La geometria algebrica si può considerare nata dalla geometria proiettiva da un lato e dalla trattazione analitica della teoria delle coniche e delle curve algebriche in generale dall'altro. Nella sua concezione più abituale essa consiste nell'interpretazione geometrica della teoria delle funzioni algebriche, cioè delle funzioni (complesse di variabili complesse) che vengono definite implicitamente da equazioni algebriche.

La geometria differenziale nasce dalle ricerche sulle superfici e sulle varietà dovute al Gauss ed al Riemann (1826-1866) e si presenta oggi come lo studio delle proprietà degli enti geometrici (spazi, varietà, ecc.) che sono invarianti di fronte a trasformazioni regolari (in piccolo). Essa ha fornito e fornisce tuttora gli strumenti concettuali ed il simbolismo alla teoria della relatività generale ed alle teorie analoghe per la formulazione delle leggi fisiche, interpretate come proprietà di un continuo quadridimensionale (tre dimensioni spaziali e una temporale), che è l'Universo nel tempo. L'esigenza geometrica, che le proprietà del continuo studiato siano indipendenti dal sistema di riferimento e dal sistema di coordinate usato, si traduce nell'esigenza fisica che le proprietà dell'universo abbiano una formulazione analitica che non dipende dal singolo osservatore o dal sistema di misure che questi usa per tradurre in numeri le sue osservazioni (v. GEOMETRIA).

5. *La meccanica razionale.* – Essa costituisce tradizionalmente una delle prime e più importanti applicazioni della geometria analitica e dell'analisi matematica nello studio della natura; in essa i dati dell'osservazione sono stati così astratti e sono di entità così piccola, rispetto alla massa degli sviluppi matematici, che questa scienza viene abitualmente annoverata tra le scienze matematiche, mentre, a rigore, dovrebbe essere considerata come un ramo della fisica. Essa tratta di enti puramente astratti, che costituiscono dei casi-limite di enti concreti: punti materiali, fili unidimensionali pesanti perfettamente flessibili ed inestendibili, corpi perfettamente rigidi; oppure adegua con opportune ipotesi lo schema matematico al comportamento reale dei corpi.

Un esempio tipico di tale procedimento è dato dalla trattazione dei fenomeni in cui entra l'attrito, p. es. l'attrito di un punto materiale posato su una superficie non perfettamente liscia; questo è dovuto al fatto che il punto ... non è un punto ma un corpicciolo materiale esteso che si deforma al contatto della superficie, la quale pure non è rigida. Nascono così delle azioni molecolari che impediscono il libero muoversi del punto sulla superficie. Tuttavia la meccanica non rinuncia a considerare il corpicciolo come sprovvisto di dimensioni, la superficie come perfettamente indeformabile, e schematizza la mutua azione dell'una sull'altro mediante una unica forza: la « reazione d'attrito », che abbia tali caratteristiche da rendere (almeno entro limiti apprezzabili) l'azione mutua del corpo e della superficie.

Tra i primi rami della meccanica razionale si conta la meccanica celeste, studio del movimento dei pianeti sotto l'influsso di forze che seguono la legge di Newton: forze di attrazione, direttamente proporzionali alle masse dei corpi che si attraggono ed inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze.

Ricordiamo qui che già il problema di determinare in modo pienamente rigoroso il moto di tre corpi che si attraggono mutuamente secondo la legge di Newton offre difficoltà di carattere matematico che non sono state ancor oggi superate, salvo casi particolari (corpi in posizioni privilegiate e dotati di velocità particolari, corpi aventi masse molto differenti tra loro, sì che uno o due possano considerarsi trascurabili di fronte alle altre o all'altra, ecc.).

Fa parte della meccanica razionale la teoria della elasticità, che ha fondamentale importanza per le applicazioni alla scienza delle costruzioni ed all'ingegneria; essa pone dei problemi matematici molto ardui ed offre pure notevoli esempi del modo con cui il comportamento della materia viene schematizzato mediante opportune ipotesi per essere suscettibile di un trattamento puramente quantitativo: ad es., recentemente, le necessità della tecnica hanno costretto i ricercatori ad abbandonare l'ipotesi della perfetta elasticità dei materiali (cioè l'ipotesi che le deformazioni, piccolissime, fossero proporzionali agli sforzi impressi) per lo studio di corpi non perfettamente elastici, che presentano caratteristiche di plasticità.

Ancora in certo modo nell'ambito della meccanica razionale rientra la fisica matematica, che viene attualmente intesa come lo studio matematico di alcuni fenomeni fisici che offrono particolari appigli a teorie matematiche di notevole elevatezza oppure di teorie unitarie, atte ad inquadrare in schemi concettuali amplissimi vasti campi della scienza fisica. Tra i fenomeni fisici del primo tipo ricordiamo il fenomeno della trasmissione del calore, che per più di due secoli ha offerto occasione di ardue ricerche matematiche ed ha così provocato il sorgere di teorie matematiche di fondamentale importanza (serie di Fourier e, più generalmente, sviluppi in serie di funzioni ortogonali); tra le teorie del secondo tipo ricordiamo la teoria della relatività generale e, nella scia di quella, le varie teorie unitarie che si sforzano di dare una visione unica di tutti i fenomeni (gravitazionali ed elettrici) dell'Universo.

Dalla fisica matematica poco si distingue la fisica teorica, se non nel senso che quest'ultima accentua più della prima l'importanza del fenomeno fisico osservato (o provocato con l'esperimento) e riduce il compito della m. nel campo più strettamente strumentale.

6. *Nuovi rami della matematica.* – Il quadro, pure molto sommario, degli aspetti attuali della m. riuscirebbe incompleto se non si aggiungessero anche dei cenni sui nuovi rami, che promettono rigogliosi sviluppi.

Tra i più interessanti ricorderemo qui la cibernetica (v.), che potrebbe essere definita come la scienza dei fenomeni dell'autocontrollo e dell'autoregolazione; più brevemente la scienza dell'automatismo. Tali fenomeni sono tipici dei meccanismi che regolano se stessi e comandano il proprio comportamento in base ai risultati delle loro operazioni precedenti. Queste ricerche interessano anche taluni aspetti del funzionamento del sistema nervoso animale e del cervello umano (in quanto strumento di attività nervosa) ed hanno il loro aspetto più spettacolare ed importante nella progettazione e realizzazione delle calcolatrici elettroniche, le quali permettono l'impostazione e l'esecuzione rapidissima di calcoli che prima d'ora sarebbero stati superiori alle forze umane. Tali macchine stanno quindi cambiando il panorama di certi campi della m. (specialmente applicata), perché svincolano dalla schiavitù delle cosiddette « funzioni elementari » che talvolta erano chiamate così solo perché tabulate da tempo e tradizionalmente usate, e permettono di attendersi risposte a problemi mai prima risolti.

IX. PROBLEMI LOGICI DELLA MATEMATICA. – L'attuale stato dei rapporti tra la m. e la logica è in gran parte la conseguenza storica della revisione critica iniziatasi nella m. in un'epoca che può localizzarsi con una certa precisione nell'ultimo ventennio del sec. XIX. In tale epoca veniva ottenuta la piena sicurezza dell'indimostrabilità del postulato della parallela e venivano tirate le somme di tante questioni maturate nelle precedenti generazioni e di paradossi chiariti nei precedenti decenni. Si faceva quindi strada la convinzione che, da un lato, la maggior parte delle questioni insolute che avevano affaticato le precedenti generazioni fossero dovute a equivocità di termini usati e a problemi mal posti, e, dall'altro lato, che i punti di partenza (postulati) da cui si parte per la costruzione di una teoria matematica fossero (almeno entro certi limiti) del tutto convenzionali e liberamente scelti.

Maturava così il concetto della m. come scienza ipotetico-deduttiva; insieme di proposizioni, per le quali non ha senso domandarsi il significato o la verità in via assoluta, ma soltanto verificare se sono state correttamente dedotte da quelle proposizioni che sono state liberamente scelte come proposizioni di partenza.

Per dirla con una frase acuta sino al paradosso « la m. è una scienza nella quale non si sa di che si parla e non si sa se ciò che si dice è vero » (B. Russell) : non si sa di che si parla, perché le parole ed i simboli usati hanno soltanto un valore formale e non hanno importanza per il loro contenuto concreto; non si sa se ciò che si dice è vero, nel senso che interessa solo se una proposizione è rigorosamente dedotta dai postulati, sul cui contenuto non si prende posizione nei riguardi della verità o falsità. La m. appare insomma in questo senso come una specie di gioco di scacchi : battaglia con pezzi convenzionalmente scelti, su un campo artificiale, con regole pure artificiali.

Non può essere sorprendente che una concezione cosiffatta portasse a ribadire i legami tra la m. e la logica formale (logica-minore) ed alla costruzione di ideografie logiche. A questo proposito ricordiamo, tra l'altro, che già Leibniz aveva proposto di sostituire al ragionamento con parole un calcolo con simboli (v. CHARACTERISTICA UNIVERSALIS) e che il Boole (1815-1864; v.) aveva istituito una simbologia con intenti analoghi.

Alla fine del sec. XIX si videro sorgere vari sistemi di ideografie logiche (Peano, Russell, Hilbert, Frege) e prese origine un movimento di ricerche di logica formale che è attualmente in piena fioritura. Nel loro aspetto comune tali ideografie sono in generale basate sostanzialmente sulla considerazione dell'aspetto puramente estensivo del concetto; questo viene sostituito con la « classe » o una « funzione di una classe », evitando di prender posizione sull'aspetto intensivo del concetto, sul contenuto, su « ciò che » fa sì che un oggetto appartenga ad una determinata classe. La relazione di subordinazione tra due concetti viene ricondotta a quella di inclusione di una classe in un'altra. Vengono generalmente ritenuti validi pochi tra i modi del sillogismo tradizionale, talvolta uno solo (*Barbara*). Con tali mezzi si cercò di rendere perfettamente rigorosi tutti gli sviluppi della m. e di esaminare i problemi logici e gnoseologici posti da questa.

Tra questi problemi ricorderemo anzitutto quello riguardante i principî dell'aritmetica. Era già noto (e del resto è rilevabile anche con una osservazione facile) che il numero intero si può presentare secondo due aspetti nettamente distinti : l'aspetto cardinale e l'aspetto ordinale. Per fissare le idee e spiegarci con parole comuni, diremo che il numero si presenta secondo il primo aspetto (cardinale), quando costituisce la risposta ad una domanda del tipo : « Quanti sono gli elementi di una certa classe ? »; si presenta invece nel secondo aspetto (ordinale) quando costituisce la risposta ad una domanda del tipo : « Quale posto ha il tale elemento in una data successione ? ». Rimaneva però da spiegare la genesi del concetto stesso di numero (ordinale o cardinale che fosse), la validità delle leggi dell'aritmetica e il significato delle operazioni. Per risolvere tale problema si cercò, quindi, un'assiomatizzazione precisa e rigorosa dell'aritmetica oppure si tentò di riassorbire addirittura questa nella logica.

La soluzione che l'assiomatizzazione fornisce può essere ricondotta sostanzialmente all'enunciazione completa di tutti i concetti che (in un determinato schema scelto) vengono considerati come primitivi (e dei quali pertanto si rinuncia a dare una definizione) e alla enunciazione completa di tutte le proposizioni primitive (postulati) delle quali si rinuncia a dare una dimostrazione. Inoltre, si deve verificare o dimostrare che tutti i concetti primitivi sono indipendenti tra loro (che cioè nessuno può essere definito a partire dagli altri), che tutte le proposizioni primitive sono indipendenti tra loro (che cioè nessuna può essere dimostrata a partire dalle altre), e che nessuna di esse contraddica alle altre o a una conseguenza delle altre.

Fin qui il problema filosofico di precisare l'essenza e la genesi del concetto di numero è soltanto spostato e precisato, poiché resta naturalmente da esaminare il significato di tali concetti primitivi e dei postulati scelti.

Orbene, in questo ordine di idee questi venivano inquadrati e per così dire riassorbiti nella logica, facendo della classe dei numeri interi una particolare classe di concetti (o di simboli) dotati di peculiari proprietà che conseguono dai postulati liberamente scelti. Quando un tale modo di procedere si voglia applicare a tutto il resto della m. nascono delle spinose questioni, alcune dovute al peculiare carattere della m. stessa, altre dovute alle posizioni gnoseologiche e filosofiche presenti, anche se non denunciate o nemmeno coscienti, dietro tali posizioni di logica formale.

Tra le altre ricordiamo, p. es., la questione della definizione « per astrazione », nella quale si va ad urtare quando si debba risalire dalla precisa delimitazione di una classe di enti (delimitazione che si ottiene, p. es., enumerando gli enti che appartengono alla classe, oppure enunciando precisi criteri per decidere se un ente preso a caso appartenga o no alla classe) all'astratto della classe, al « quid » che è in ogni oggetto della classe e fa sì che l'oggetto appartenga a questa. Ci si trova in tale situazione quando in geometria elementare si voglia definire rigorosamente, p. es., la lunghezza di un segmento o l'area di una figura piana oppure quando si vogliano costruire delle teorie analitiche dei numeri che costituiscono estensioni della classe degli interi (razionali, relativi, reali, ecc.). Occorre allora fare appello ad una « attiva capacità di astrazione della mente umana », sulla quale i logici formali fanno dell'ironia e che non si lascia esprimere nei simboli delle ideografie.

Ricordiamo inoltre il presentarsi dei paradossi e delle antinomie (paradosso di Burali-Forti, antinomia di Russell, ecc.) che nascono quando, p. es., si usi senza precauzione del concetto della « totalità degli enti » o della « totalità dei concetti », ecc. e per evitare i quali si sono escogitati vari ritocchi alle regole delle logiche formali (teoria dei tipi e simili). Si presentano inoltre delle notevoli difficoltà logiche e filosofiche peculiari alla m., la quale ha molto spesso a che fare con classi di infiniti elementi.

La classe dei numeri interi è di tale tipo e per essa vale il « principio di induzione completa », che si può enunciare così : « Se una proprietà appartiene allo zero e se, dall'ipotesi che appartenga ad un numero qualunque n si riesce a dimostrare che appartiene anche al successivo di n, allora la proprietà appartiene ad ogni numero ».

Non si può dare qui nemmeno un piccolo cenno delle discussioni che vennero fatte a proposito di questa proposizione, che non è sperimentale e che vanamente si cercherebbe di dimostrare in una impostazione dell'aritmetica che si potrebbe chiamare classica. Nella trattazione del Peano tale principio viene enumerato tra i postulati, che dovrebbero caratterizzare la classe dei numeri interi; in altre parole la posizione è invertita : non ci si propone di spiegare perché valga il principio di induzione, ma semplicemente si chiamano « numeri » quegli enti per i quali vale il principio stesso.

Non sono naturalmente questi i soli casi in cui si presentano difficoltà dovute alle classi infinite : ricordiamo i paradossi che nascono dalla « teoria degli insiemi » (*Mengenlehre*) di Cantor, quelli che sorgono dalla teoria dei trasfiniti (ordinali e cardinali), ecc. Un esempio, tra i tanti, vogliamo ricordare, perché rimase classico per la importanza delle discussioni che fece nascere e per le ripercussioni che ebbe sulla teoria delle funzioni : il cosiddetto « principio di Zermelo », che si è già nominato. Esso viene anche chiamato « principio della scelta » e afferma in sostanza la possibilità di eseguire infinite scelte arbitrarie. In forma più precisa esso può essere enunciato così : « Dato un insieme di insiemi, cioè un insieme E i cui elementi (in numero infinito) siano insiemi I, esiste (almeno) una corrispondenza che ad ogni insieme I di E fa corrispondere un elemento di I ».

È chiaro che, se gli insiemi I (costituenti E) fossero in numero finito, la corrispondenza si potrebbe ottenere scegliendo arbitrariamente un elemento per ogni I; orbene il « principio della scelta » afferma la possibilità di far questo anche se gli I sono in numero infinito. Per primo il Peano negò validità ai ragionamenti tra le cui premesse vi fossero infinite scelte arbitrarie, assimilandoli a sillogismi inconcludenti perché aventi infinite premesse. In seguito alle critiche di Peano, Zermelo enunciò il principio che va sotto il suo nome; ma in mancanza di dimostrazione esso rimane una pura affermazione, non una risoluzione logica delle difficoltà del Peano; affermazione a proposito della quale i matematici si sono variamente divisi.

Come abbiamo avuto occasione di dire, le ricerche sorte da questioni di matematica a cui abbiamo ora accennato hanno condotto alle moderne ricerche di logica, alle note questioni sulle « lingue aperte » e « lingue chiuse », alle affermazioni della totale convenzionalità della logica. Appare evidente dalle tesi sostenute che non si è più qui nel campo della m., e neppure in quello ristretto della pura logica formale: si entra decisamente nel campo della gnoseologia e in molti casi in quello della metafisica, anche se non esplicitamente confessata, anzi pertinacemente negata (v. LOGICA MATEMATICA).

Per ritornare al campo più strettamente matematico, le questioni logiche cui abbiamo fugacemente accennato sono strettamente collegate anche con una importante questione, che riguarda l'assiomatizzazione dei vari rami della m. (e non solo di questa): la questione dell'indipendenza e della compatibilità di un sistema di postulati. Appare invero immediato che, anche qualora si accetti una logica le cui regole siano poste arbitrariamente, la regola di coerenza a tali regole deve essere fuori del complesso di tali regole ovvero, come suol dirsi, enunciata « con altra lingua ».

In modo analogo la non contraddittorietà di un sistema di postulati va verificata uscendo fuori di essi (teorema di Gödel); abitualmente essa si ottiene cercando una interpretazione dei singoli su cui i postulati agiscono, simboli rimasti a priori « vuoti », cioè privi di concreti riferimenti con enti che soddisfano ai postulati enunciati e dei quali si sappia che costituiscono un sistema coerente, cioè privo di contraddizioni interne.

La grande specializzazione di queste ricerche di logica ha fatto sì che queste vengano ormai coltivate da ricercatori che non possono più chiamarsi matematici. Questi ultimi hanno ormai assimilato i risultati positivi apportati alla loro scienza dalla parentesi critica e continuano a costruire i loro sistemi lasciandosi suggerire i punti di partenza dal mondo reale (anche modificato o affinato dalla fantasia), anche se il loro punto di arrivo può sembrare molto distante da questo.

BIBL.: La bibl. riguardante la m. e le questioni filosofiche ad essa inerenti è naturalmente imponente; inoltre il linguaggio altamente specializzato e il simbolismo della m. e della logica matematica moderna rendono estremamente ardua l'opera di chi voglia indicare delle fonti bibliografiche atte ad essere consultate con profitto anche dai non specialisti. Pertanto ci si limita all'indicazione sommaria di alcune opere fondamentali. Per la storia della m.: M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Lipsia 1912; G. LORIA, *Guida allo studio della storia delle m.*, Milano 1916; ID., *Storia delle m.*, Torino 1929; W. W. R. BALL, *A Short Account of History of Mathematics*, 5ª ed., Nuova York 1945; E. T. BELL, *The Development of Mathematics*, ivi 1945. Fra le opere che riguardano l'aspetto prevalentemente matematico delle questioni sui fondamenti della m.: *Questioni riguardanti le m. elementari*, a cura di F. ENRIQUES, 3ª ed., Bologna 1923; *Enciclopedia delle m. elementari*, a cura di L. BERZOLARI, G. VIVANTI, D. GIGLI, Milano 1930.

Per la filosofia della m.: G. FREGE, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslavia 1884; rist. 1934; ID., *Grundgesetze der Arithmetik*, 2ª ed., Jena 1903; G. PEANO, *Formulario matematico*, Torino 1908; A. TARSKI, *Einführung in die mathematische Logik*, Vienna 1937; F. WAISMANN, *Introduzione al pensiero matematico*, tr. di L. Geymonat, Torino 1939; D. HILBERT - P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, Berlino 1939; N. BOURBAKI, *Éléments de mathématiques*, Parigi 1948; G. FREGE, *Aritmetica e logica*, tr. di L. Geymonat, Torino 1948; E. W. BETH, *Les fondements logique des mathématiques*, Parigi 1950; 2ª ed., Lovanio 1955; A. WHITEHEAD - B. RUSSELL, *Principia Mathematica*, 2ª ed., Cambridge 1950; E. CARRUCCIO, *M. e logica*, Torino 1951; B. RUSSELL, *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londra 1953; tr. it., Milano 1946.

Per le questioni di logica e filosofia strettamente collegate con questioni matematiche: R. CARNAP, *Logische Syntax der Sprache*, Vienna 1934; D. HILBERT - W. ACKERMANN, *Grundzüge der Teoretischen Logik*, 2ª ed., Berlino 1939; J. R. WEINBERG, *Introduzione al positivismo logico*, tr. di L. Geymonat, Torino 1950; F. BARONE, *Il neopositivismo logico*, Torino 1953; R. CARNAP, *Einführung in die Symbolische Logik*, Vienna 1954; L. WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico-Philosophicus*, testo e tr. a cura di G. C. M. Colombo, Milano 1954.

Infine per i fondamenti della statistica e del calcolo delle probabilità: E. CZUBER, *Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Lipsia 1923; H. REICHENBACH, *The Theory of Probability*, Los Angeles 1949; R. CARNAP, *Logical Foundations of Probability*, Chicago 1950; R. VON MISES, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, Vienna 1951. Ricordiamo infine la collana diretta da BROUWER, BETH, HEYTIN, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, Amsterdam.

C. F. Manara